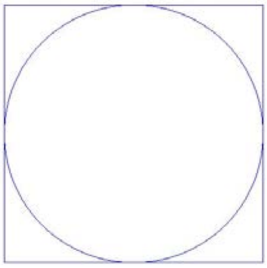
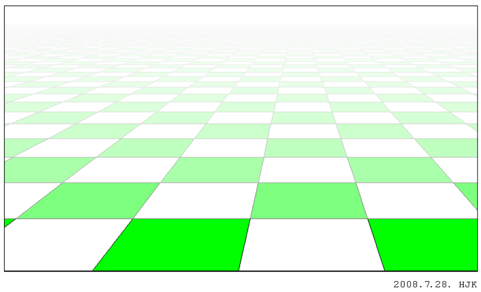
방원도
김홍종(서울대학교)



數之法出於圓方 … 圓出於方 方出於矩 (주비산경)

Ⅰ. 머리말

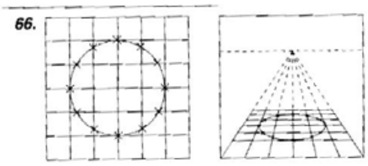
``미술과 수학은 오랜 친구이다”라고 말하는 것은 마치 `하나'를 `둘'이라 말하는 것 같은 느낌이 든다. 이들은 모두 영감(靈感, inspiration)을 얻으려는 과정에서 나온 산물들이다. 우리는 자라면서 많은 것을 보고, 많은 것을 듣고, 많은 것을 느끼지만 아직도 그것이 `충분함'을 모른다.



일정한 크기의 기둥이 규칙적으로 배열된 것을 보는 것은 조화수열을 보는 것이다. 조화수열은 화음을 통하여 들을 수도 있다. 일정한 크기의 타일들이 깔려 있는 바닥을 보면 또 다시 조화수열이 나타난다.[1]

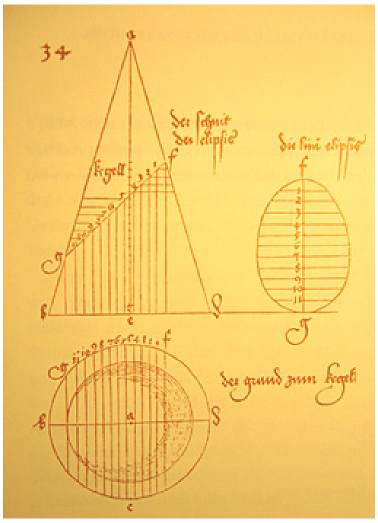
이탈리아의 알베르티(Leon Battista Alberti, 1404--1472)의 세 권으로 된 조그만 “회화론(Della Pittura, 1435)"은 미술사와 수학사에서 매우 중요한 역할을 하는 책이다. 알베르티는 이 책에서 화법에 대하여 많은 이야기를 하였는데, 그 중에는 정사각형에 내접하는 원을 바라보고 화폭에 담으면 어떤 모양으로 나타나는가를 설명한 부분이 있다. 이 책은 우리나라에서도 번역되어 출판되었는데, 애석하게도 삽화가 제대로 그려져 있지 않다.[2]

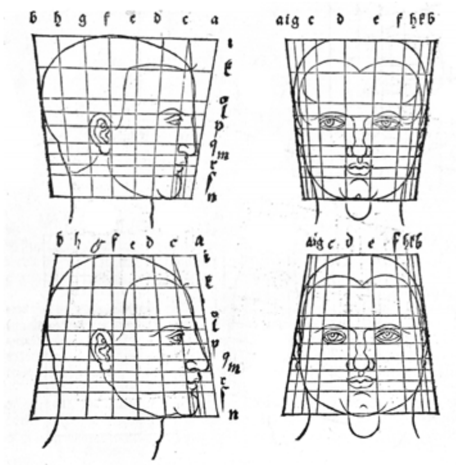
1) 김홍종, *문명, 수학의 필하모니*, 효형, 2009.
2) L. Alberti, *Della Pittura*, 1435. (알베르티 지음, 노성두 옮김, *알베르티의 회화론*, 사계절, 1998, 2004. 진중권, *서양미술사, 고전예술편*, 휴머니스트, 2008, 2013.



알베르티의 회화론 2권 73

흔히 “기하학”이라고도 부르는 “자와 컴퍼스를 통한 측정술(Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, 1525)”이라는 네 권의 책의 저자인 독일의 뒤러(Albrecht Dürer, 1471-1528)도 다양한 원뿔곡선을 그리는 법을 설명하였지만, 이것도 오늘날 요구하는 엄밀성이 다소 결여 되어 있다.





뒤러의 `측정술'에서[3)]

많은 화가와 기하학자들이 이런 도형과 그 변화에 관심을 가지는 이유는, 사람마다 얼굴 모습이 다르고, 또 사물은 보는 방향에 따라 다르게 보이지만, 그러한 ``다름 속에서도 같음''을 구하고자 하는 마음이 나타난 것이라 할 수 있다.

부활의 시대, 즉 르네상스 시대에 예술가들의 열정은 사영기하학을 크게 발전시켰는데,[4)] 이때 발견된 기본 정리 중 하나는 ``모든 사각형은 같다''는 것이다.[5)] 다시 말하면 공간에 두 평면에 있고, 한 평면에는 정사각형, 또 다른 평면에는 일반사각형이 놓여 있을 때, 정사각형의 상(像, image)이 주어진 일반사각형이 되는 사영변환이 있다는 뜻이다. 사영변환이란 관점을

3) A. Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*, 1525.
E. Panofsky, *The Life and Art of Albrecht Dürer*, Princeton Univ. Press, 1943,
(에르빈 파노프스키 지음, 이산 옮김, *인문주의 예술가 뒤러*, 한길아트, 2006.)
4) J. V. Field, *The Invention of Infinity*, Oxford Univ. Press, 1997, 2005.
5) D. Brannan, M. Esplen, J. Gray, *Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1999.
M. Henle, *Modern Geometries*, Prentice Hall, 1997.
A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, 2012.

달리하는 여러 투시도를 합성하여 얻은 것들이다.

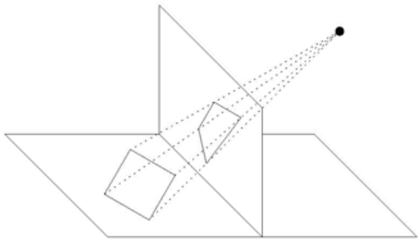
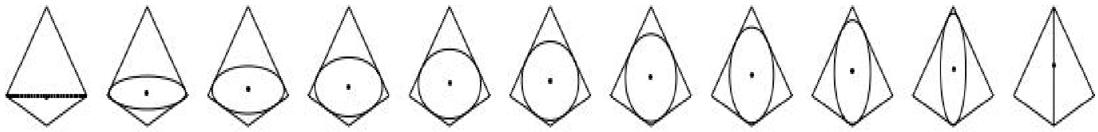
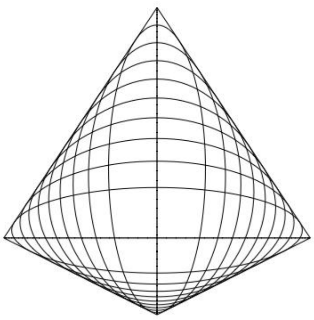


그림: 사각형 바라보기

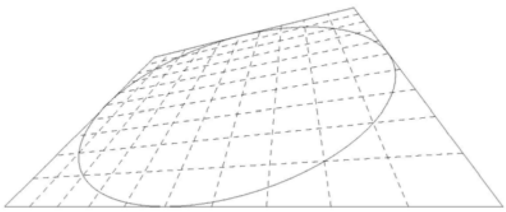
이와 같이 한 사각형이 정사각형의 그림자로 나타날 때, 정사각형에 내접하는 원의 상은 어떤 모습일까?

물론 그 모습이 타원임은 잘 알려져 있지만, 볼록 사각형 속에 내접하는 타원은 무수히 많이 있다.





이 많은 타원 중에서 정사각형에 내접하는 원을 투영하여 얻은 타원을 “투영방원”이라 부른다면, 다음은 투영방원의 한 모습을 보여준다.

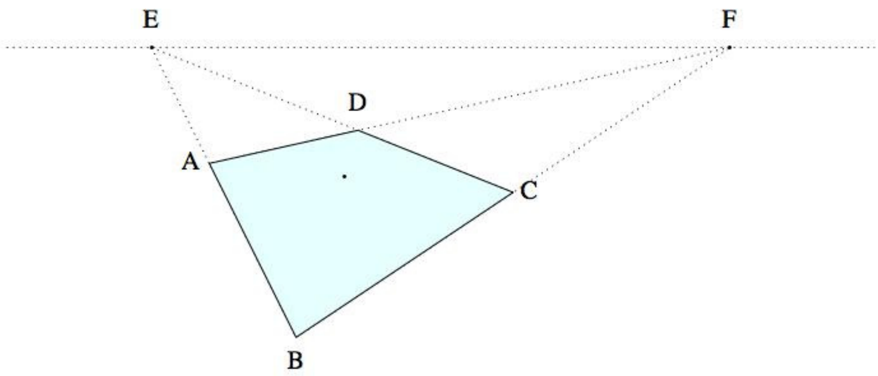


이 글에서는 평행사변형이 아닌 일반적인 볼록 사각형의 내부에 “투영방원”을 작도하는 법을 설명한다.

Ⅱ. 투영방원

방원도란 정사각형 속에 내접하는 원이 들어 있는 그림을 뜻한다. 이 그림을 관찰자가 바라보고 화면에 담으면, 화면과 관찰자의 위치에 따라 여러 가지 모습으로 보인다. 이때 방원도가 놓여 있는 바탕면과 화면에 평행이면, 그 정사각형의 상은 여전히 정사각형이고, 원의 상도 여전히 원이다. 그러므로 앞으로 바탕면과 화면이 평행이 아닌 경우를 살펴보기로 한다.

이 경우 바탕면의 정사각형의 두 쌍의 대변들은 각각 평행선들이고, 이것은 화면의 지평선에서 두 소실점을 만든다. 그러므로 정사각형은 화면에 다음과 같은 모습으로 나타난다.



이 그림에서 사각형 내부에 찍혀 있는 점(G)은 사각형의 두 대각선들의 교점인데, 이 점은 바탕면의 방원도에서 원의 중심에 대응되는 점이다. 그러므로 소실점들 E, F와 점(G)를 연결한 직선들이 사각형 ABCD의 변들과 만나는 점들이 바로 투영방원이 접하는 점들이다. 이 점들을 A', B', C', D' 이라 부르기로 한다.

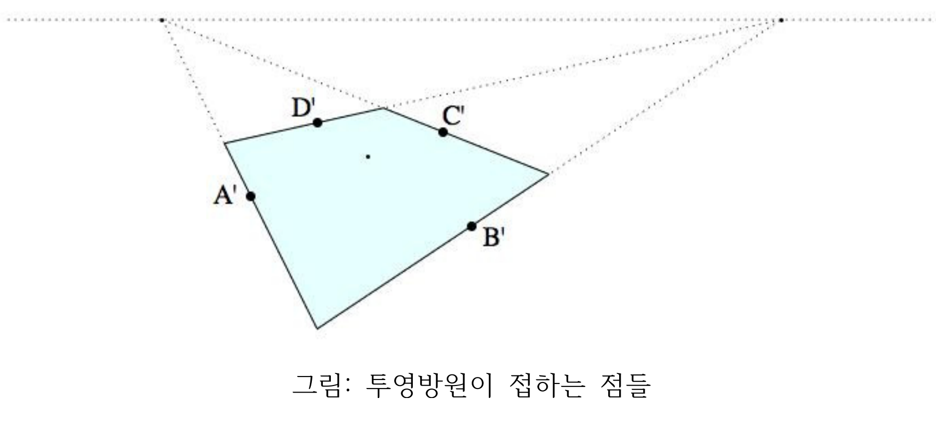


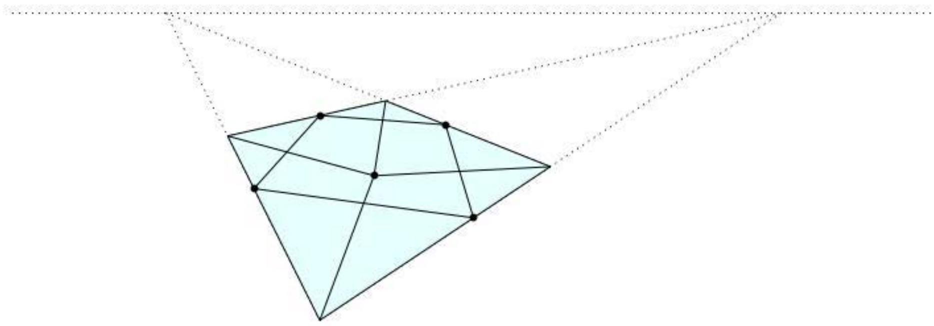
그림: 투영방원이 접하는 점들

이제 투영방원의 중심(O)을 구하기 위하여 타원의 다음 성질을 이용 한다:

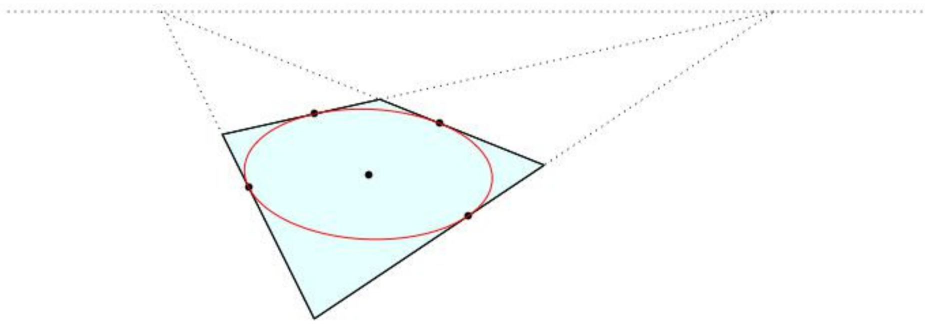
타원의 현의 양 끝점에서 그은 두 접선이 만나는 점을 P라 하면, P와 현의 중점을 연결한 선은 타원의 중심을 지난다.

그러므로 타원의 현 A'B', B'C', C'D', D'A' 의 중점을 각각 A'', B'', C'', D'' 이라 할 때,

투영방원의 중심 O는 직선 BA'', CB'', DC'', AD'' 들이 교차하는 곳이다. 물론 이 네 직선은 한 점에서 교차한다.



이제 중심이 O이고 점 A', B', C', D'에서 사각형 ABCD에 접하는 타원을 구성하는 문제가 되었다.



이 문제는 결국 주어진 각 ∠A'BB' 에서 A'B'의 중점을 A''이라 할 때, 선분 BA'' 의 연장선의 한 점 O를 중심으로 하고 두 점 A', B' 에서 각 ∠A'BB' 에 접하는 타원을 구하는 문제이다. 중심이 주어진 타원은 서로 켤레를 이루는 벡터 v, w 를 사용하면

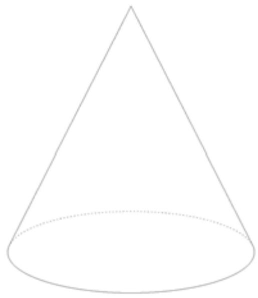
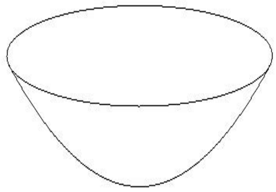
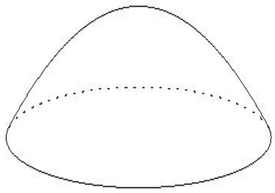
O + v cos t + w sin t

와 같이 쉽게 매개화할 수 있다. 켤레를 이루는 벡터의 특징은 타원의 점 O+v에서 w가 접선방향을 가리키고, 마찬가지로 점 O+w에서 -v가 접선방향을 가리킨다.

현재 우리가 구하려는 투영방원에서 켤레를 이루는 벡터 중 하나는 v = OA'이고, 또 하나의 벡터는 벡터 A'B 의 크기를 조정하여 얻은 w = s A'B 이다. 이 크기 s를 구하는 문제는 간단한 선형대수 문제이고, 따라서 투영방원이 완성된다. 구체적으로는 벡터 OB'을 OA'과 A'B의 일차결합으로 표현하여

OB' = a OA' + b A'B

라 할 때, s = $\sqrt{b(b-1)/a(1-a)}$ 이다.

Ⅲ. 결론

투영방원을 구하는 알고리듬은 원뿔이나 포물면 등의 그림을 그릴 때에도 그대로 적용할 수 있어서, 독자들에게 아름다운 그림을 선물할 수 있다.

「방원도」에 대한 질의문

한의정 (숙명여자대학교)

Ⅰ. 머리말

발표자는 미술과 수학의 수많은 접점 중 방원도를 택하고, 국내에 소개된 방법론의 아쉬운 점을 지적하면서 이 논문의 필요성을 제기한다. 이어 르네상스 시대 사영기하학의 산물 중 하나인 투영방원을 정의하고 그 작도법에 대해 단계별로 상세히 설명하고 있다. 이 연구는 기존의 논의들과 달리 알고리즘을 구하는 실천적인 방법을 보여주고 있어 향후 다양한 분야에서 직접 적용될 수 있으리라 기대된다. 질의자는 이 적용의 지점에서 질문하고자 한다.

Ⅱ. 질문 1

구체적인 예술작품에서 방원도가 보이는 예들을 들어주실 수 있을지, 더 나아가 본문에서 설명해주신 투영방원 작도법대로 그려진 예가 역사적으로(혹은 현대에) 이미 존재하는지 알고 싶다.

Ⅲ. 질문 2

사실 대부분의 작가들은 이러한 작도법을 알지 못한 채 원, 원뿔, 포물면을 그린다. 순수한 수학이론에서 본다면 이러한 그림은 완성도가 떨어진 것이다. 그럼에도 우리의 경험은 때로는 수학적으로 완성도가 떨어진 그림에 더 아름다움을 느끼기도, 감동을 하기도 한다. 이는 순수한 이성으로 가능한 이상적인 형식과 우리의 실제 경험 사이의 괴리 문제이기도 하다, 또 한편으로 우리는 완벽하고 정형화된 형식들이 반복될 때 느낄 수 있는 안정감, 편안함이 쉽게 지루함으로 바뀌는 경험도 한다. 이에 대한 (수학자로서) 발표자의 견해가 궁금하다.